牛頓如何想出第二運動定律
—由早期運動的原因到外力概念的出現

姚　珩[1*] 楊艷玲[2] 吳承宣[3]

[1]國立臺灣師範大學 物理系
[2]福建福州清華大學附屬中學 福州學校
[3]台北市立大同高級中學

物理學是探討自然界裡物質交互作用的現象，最先被發現的交互作用是重力，它主要是透過牛頓在 45 歲時寫下三大運動定律中的第二定律演繹出來的，它反映出牛頓思維方法的有效性、普遍性與創造性。此定律可說是古典物理中最重要的原理(Mach,1893)，也決定了今日物理學的描述方式，從此「力」概念及交互作用的術語便緊密地與物理學聯繫在一起(Coelho, 2007)。

1900 年科學家潘卡瑞(H. Poincare, 1854-1912) 在巴黎國際哲學大會上提出了一個問題:$F = ma$是否可以通過實驗驗證?接著指出此問題涉及到另一個困難:因為我們甚至不知道什麼是力和質量。最近的物理教科書中也有一些學者不諱言:我們並不明白力是什麼(Dransfeld, 2001)。若不知道力是何物，便很難以最好的方法詮釋牛頓第二運動定律，因此力在探討迷思概念的文獻中成為主要議題也就不足為奇(Carson & Rowland, 2005)。

本文將試著從科學史與物理思維的角度，剖析力概念是如何在牛頓身上慢慢成形，藉此體會力並不是從重量、靜力平衡與彈性形變類比得知的概念，而是西方近兩千多年來不斷質問造成運動或運動改變原因的一種自然哲學的探究過程。

壹、運動原因來自物體的本性或接觸的作用

起源於古希臘時代的自然哲學是在探討自然界裡物體的性質、數量與位置的變化現象，其中位置的變化稱作運動，運動問題因此一直都是西方自然哲學的核心課題。那是什麼原因造成物體運動呢?亞里斯多德(Aristotle, 384-322 BC)認為運動物體依照其本性都有其目的地，輕物上升，重物掉落，這是因它們的重性與輕性(heaviness and lightness)所致，這種順著物體本性，朝向其目的地的運動，稱為自然運動。不按照自然運動方式的稱為受迫運動，例如要讓物體向上運動，則必須靠著接觸，向上拋擲。亞里斯多德稱此種推、拉、擠壓為「作用」(action)，但此時並沒有「力」(vis, force)的說法與概念(Dijksterhuis, 1961)。

然而為何脫離了投擲者的石塊還能繼續運動呢？亞氏認為:投擲者投出石塊同時，他也推動了附近的空氣介質，藉著空氣擠壓石塊，使石塊能持續運動下去(Aristotle, 322 BC)。此論述保持著物體的作用必須靠接觸來傳遞的一致性。

貳、站在巨人肩膀上—牛頓運動定律的思維基礎

一、 伽利略的合成位移

伽利略(G. Galileo, 1564-1642)受到哥白尼(J. Copernicus, 1473-1543)主張天文學應由背後的數學結構來詮釋的啟示，暫時擱置探討落體運動的成因，而著重在落體該如何運動—應按照最簡單的數學規律，由此得到水平拋射的路徑，如圖 1，是由水平方向的等速位移 *bc* 或 *bd*，與垂直方向的等加速度位移 *bo* 或 *bg* 合成的長方形對角線 *bi* 或 *bf* 所描述(Galilei, 1638)。在下文中將指出，此種分析方法對牛頓日後思考二力共同作用時的運動路徑幫助很大。

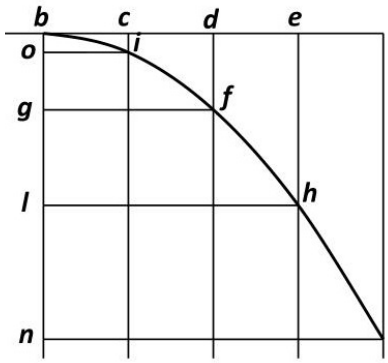

圖 1: 伽利略《兩門新科學對話》裡平面運動的合成圖

二、 不必靠接觸而能運動的原因—抽象化的沖量、笛卡兒的固有力與碰撞

中世紀科學家對前人所描述拋出的石頭能繼續運動，是受到空氣介質的推動，提出質疑，認為若石塊繫上一條細線，水平投出後，由於空氣較易推動細線，細線將被推到石塊前方而非後方，這與事實不符。為消除此矛盾，六世紀的菲洛彭諾斯（Philoponus, 490-570）主張：當物體脫離了推動者之後，還能持續運動，是因為推動者給予了物體一個運動強度(motive power)，是這個強度維持了物體的運動。

十四世紀布里丹（Buridan,1300-1358）將此運動強度名為沖量(impetus)，他說(Dijksterhuis, 1961):

> 拋體離開投擲者後，會受到投擲者最初所賦予的沖量推動,...讓它持續運動下去。

他破除了古希臘所堅持的接觸作用，而用一種儲存在運動物體內部的抽象「形式概念」—沖量—來說明，此觀點一直被沿用到牛頓時期。

接著建立起機械論哲學的笛卡兒(R. Descartes,1596-1650)，主張所有自然現象都是由物體或質點的位置改變—運動—所引起的，不可使用任何神秘模糊的精神力量來說明物質世界(Westfall, 2000)。他保留了沖量觀點，在其著作《哲學原理》裡

提出第一自然律:

「每一物體在其自身強度(power)內，將一直維持於相同的狀態；一旦它運動後，則會繼續運動下去。」(Descartes, 1644)

笛卡兒將沖量解釋為運動物體自身的「固有強度」(innate power)，後來牛頓稱它為固有力(innate force)或運動量(quantity of motion)。這是史上第一次清晰出現的「力」概念，也是造成物體運動的主要原因。他接著附註:

若物體為靜止狀態，除非受到外在原因影響，則它絕對不會開始運動。

然後再寫下第二自然律:

「運動物體自身將作等速直線運動；因此作圓周運動的物體，總會傾向離開圓心。」

此二自然律後來也成為牛頓慣性定律的主要依據。(姚珩，2021)

在《哲學原理》第 25 節中，笛卡兒明言「運動是一個物體對另一個物體直接接觸的影響」。他認為在物質世界裡，沒有神秘之物，必須且唯有靠物質之間的接觸或碰撞，方可造成或改變其他物體的運動狀態。對他而言，運動的原因只有兩個:因內在固有力維持的等速直線運動，與因接觸碰撞所形成的變速運動。

三、 圓周運動-笛卡兒的離心趨勢、惠更斯的離心力、運動變化原因的數學化

笛卡兒認為由於內在的固有力，物體將竭盡維持其等速直線的運動狀態，因此對做圓周運動的物體，如圖 2，繩上的球都具有脫離圓周路徑上的 B、F 點朝向水平直線上的 C、G 點運動的特性，此種逃離圓心之性質稱為為離心趨勢(endeavor)或離心傾向(tendency)，但他還不知道要如何計算它。

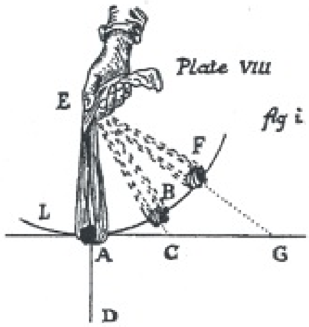

圖 2：笛卡兒《哲學原理》中的離心趨勢圖

惠更斯(C. Huygens, 1629-1695)以獨到的見解，將笛卡兒所主張之離心趨勢加以數學化，並將物體欲脫離圓弧回到原初直線的趨勢，稱為「離心力」(centrifugal force)，其大小如圖 3 中的 EG 或 DF 長度。並寫下了三個創新假設 (Huygens, 1659):

假設一:假如兩個一樣的物體在相同時間內繞完一個圓周，大圓周的離心力會大於小圓周的離心力(與半徑成正比)。(圖 3)

假設二:假如相同的物體在同樣的軌道以不同的等速率做旋轉，…離心力…與速率的平方成正比。

假設三:假如兩個相等物體以同樣的速率分別作不同大小的圓運

動，它們的離心力會與直徑成反比。

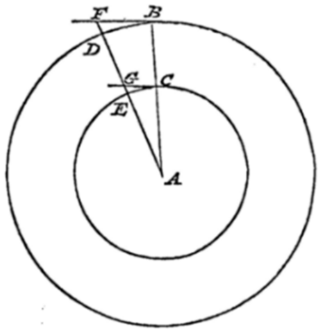

圖 3：在相同週期下，不同圓周上物體的離心力(以 EG 或 DF 表示)與半徑成正比

若以今天的代數符號 F 表示離心力，r 表示圓周運動之半徑，ω為角速率，v 為線速率，則假設一表示ω固定時，離心力與半徑成正比：$F \propto r$；假設二表示 r 固定時，離心力與速率平方成正比：$F \propto v^2$；假設三表示 v 固定時，離心力與半徑成反比：$F \propto 1/r$。此三假設若結合在一起，就形成後來所言離心力 F 與 r、ω、v 之關係為

$$F \propto v^2/r = r\omega^2$$

最初惠更斯並未給出這些命題証明，但他提出了造成物體作曲線運動原因—離心力—的強度之量化方法，與正確的數值結果。他特殊的數學處理方式突破了機械論者僅能定性描述的思想侷限，開拓了物理學家的視野，深深地啟發了牛頓。

惠更斯進一步認為，物體的重性就是因旋轉之地球周圍的以太介質，受到離心力作用，沿著連心線離開地心，所騰出的空間，造成物體因填補其位置而下落，並計算出物體下落距離會與時間平方成正比，而可符合伽利略的落體運動關係，更讓許多物理學家誠服於離心力觀點。

然而離力心的觀點並無法說明克卜勒三個行星定律，也無法解釋月亮繞著地球運動與蘋果落地是否來自相同原因，在 1680 年之前，惠更斯與牛頓皆束手無策。

參、固有力與向心力的合成—牛頓關鍵小品《論運動》

一、《論運動》中的預備定理 1—牛頓第二運動定律的前身

虎克（R. Hook,1635-1703）是首位反對惠更斯離心力觀點的人，於 1666 年提到:能使直線運動變為曲線運動的原因，可能來自於中心物體的一種吸引(attractive)屬性。1679 年擔任英國皇家科學院秘書時，在兩個月內寄了四封信給牛頓，寫到：

> 「可否讓我明白您對：沿著切線的直線運動，和一種朝向中心的吸引運動，所合成的行星運動之想法。…此中心之吸引強度(central attraction power)應與距離的平方成反比。毫無疑問，以您傑出的方法，您可輕易地找出這會是何種曲線，且提供造成此比例的物理原因。」(Turnbull, 1960)

虎克主張圓周運動物體具有朝向中心的傾向，對牛頓的確是一個很大的啟發，但虎克終其一生並未提到向心力一詞。牛頓也一直未回覆他對吸引強度的看法，直到五年後接受哈雷訪問時，牛頓才將他的

觀點寫在 1684 年嶄新且僅有 7 頁的《論運動》小冊裡 (Newton, 1684; Brackenridge, 1995)，手稿中最前面含有三個定義，分別為向心力、固有力與阻力(resistance)，其中：

定義 1:物體被推動或吸引，朝向中心點的力，稱為向心力(centripetal force)。

此處的向心力隨後也擴展為 1687 年在其《自然哲學的數學原理》巨著中八個基本定義裡的後四個。

《論運動》小冊還包含兩個預備定理，三個假設，四個定理，七個問題，其中預備定理 1 實為全書最重要的論證基礎:

預備定理 1：二力結合在某段時間作用於物體上的結果為一平行四邊形的對角線，其兩邊為各別力在同一時間下的作用。(A body, with forces having been conjoined, describes the diagonal of a parallelogram in the same time as it describes the sides, with forces having been separated.)

在不考慮阻力情形下，雖然牛頓與諸多學者均未明言，但在當時背景下他所說的力應只有兩種—向心力與固有力。而向心力則需符合笛卡兒所稱一個物體對另一個物體直接接觸所造成的影響，亦即此兩種力必須視為瞬間接觸的「脈衝力」(impulse)。因僅在二力瞬間作用完後，才可引用由笛卡兒所述:物體將竭盡維持著等速直線運動狀態，自 A 點分別運動至 B 點與 C 點，如圖 4。

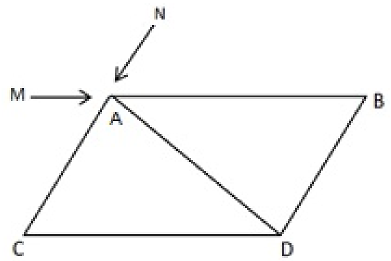

圖 4:《論運動》中兩脈衝力 M 與 N 瞬間作用完後物體的位移為 AD (作者改繪)

若此兩力合成為一力，則在此合力瞬間作用完後也必須以等速直線運動。他以

在給定時間內所產生的位移

= 所受脈衝力作用完後的結果

並使用伽利略位移合成的方法，描述兩合成脈衝力的結果，就是 AB 與 AC(或 BD)的合成位移 AD。

此預備定理不斷地被應用在牛頓的論證裡，它可証明《論運動》中的四個定理—面積律、圓周律、橢圓律與週期律，這些也全都是以後《原理》中的核心命題。其中的牛頓第二運動定律可說是完全等價於此預備定理的另一種描述。

二、 固有力與向心力的合成可得到面積律

利用此預備定理，牛頓可推得《論運動》中的定理 1 (Newton, 1684):

作環繞運動的物體，其指向力心的直線所掠過的面積正比於時間。

證明:假設時間被分成幾段相等部分，

在第一段與第二段時間中，物體受固有力分別劃出直線AB與 Bc，且Bc = AB (圖 5)。若在 B 點受到指向 S 的向心脈衝力作用，則由預備定理 1，固有力與向心力合成的瞬間作用後，物體會沿著對角線，在相等時間下形成位移 BC，故面積ΔSAB = ΔSBc = ΔSBC (同底等高)，而得到面積律。

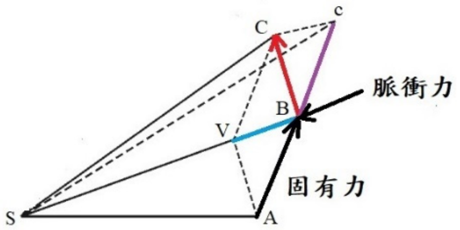

圖 5：《論運動》中利用二力的合成作用與預備定理 1 得到面積律 (作者改繪)

三、固有力與向心力的合成可得到橢圓律

由預備定理 1，牛頓可再得到《論運動》中的定理 3 (Newton, 1684):

繞著焦點 S 做橢圓運動物體所受之向心力，會與 $SP^2 \times QT^2/QR$的倒數成比例。(If a body, by orbiting around the center S, should describe any curved line APQ, then the centripetal force would be reciprocally as the solid $SP^2 \times QT^2/QR$.)

證明:在一段特定時間下，物體於 P 點的固有力會讓它運動至 R 點，但物體實際上是運動到 Q 點(如圖 6)，由預備定理 1(將充分與必要條件對換使用)，唯一可能便是物體在該點受到指向焦點 S 的向心力作用，且其效果為 PX 或 QR。

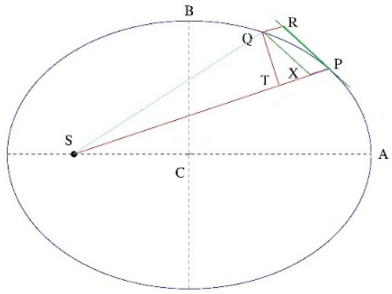

圖 6：《論運動》中利用預備定理 1 得到橢圓所受向心力與距離平方成反比

又因在此段時間t及固定向心力作用下，位移 QR 的長度會與t^2成正比(此為《論運動》中的假設 4，牛頓未解釋其原因，可能是由落體運動類比得知);又由面積律，時間可以三角形面積$SP \times QT/2$來表示，故向心力效果應正比於QR/t^2，即正比於$QR/(SP^2 \times QT^2)$，故得証。

進一步由橢圓正焦弦性質 $QR/QT^2 = AC/2BC^2 = a/2b^2$=常數，其中 a, b 分別為半長軸與半短軸。故向心力大小

$$F \propto QR/(SP^2 \times QT^2) \propto 1/SP^2 \propto 1/r^2$$

其中 SP 或 r 為物體與焦點距離，由此得到影響深遠的距離平方反比律。由上面兩定理的証明可看出:

牛頓在此時並無「外力」的觀點，也還不清楚平面運動的「加速度」是何意，自然更不知道該如何描述平面加速度。

但他已利用兩力合成的預備定理 1 推得距離平方反比律，奠定了萬有引力定律的基礎。

肆、由曲線軌跡尋找單一作用力 — 牛頓第二運動定律的出現

一、《原理》中的外力與第二運動定律

在《原理》一書之前，與力相關的概念只有固有力與向心力兩種，直到 1687 年牛頓的心態有所轉變，雖然《論運動》的闡述已屬創新清晰，但他想再進一步簡化描述運動的原因，並開始只想用單一作用力，而不願透過與固有力的合成，來得到面積律與橢圓律。這也是歷史上才首次對「力」或「外力」有直接的描述與定義 (Newton, 1687)：

定義 4: 外力是施加在物體上,用來改變其靜止或等速運動狀態的作用。
(An impressed force is an action exerted on a body, in order to change its state, either of rest or of moving uniformly forward in a right line.)

此定義清楚顯示牛頓此時的內心想法與定見，他想把歷代以來對物體運動改變的原因—本性、接觸、碰撞、趨勢、離心力、吸引強度—全部排除，僅用一個概念—外力—來涵蓋。

此外或許是受到笛卡兒在其代表作《哲學原理》中寫下三個自然律的影響，或許牛頓是劍橋大學三一學院的畢業生與教授，也或許是他虔誠遵循三位一體的神性信仰，牛頓最終也在類似的巨著《自然哲學的數學原理》中提出三個關鍵定律。他因此將 1684 年具有相同意義的預備定律 1 改寫,發表了劃時代的第二運動定律:

定律 2: 運動量的變化與外力成比例，且運動量的變化是沿著外力的直線方向上。
(A change in motion is proportional to the motive force impressed, and takes place along a straight line on which that force is impressed.)

其中「運動量」是笛卡兒在討論物體碰撞現象中最先引入，原意本為體積與速度的乘積，牛頓在《原理》中第一次使用了此觀點,但定義它為質量與速度的乘積,也就是現在所說的動量，它可用速度或在固定時間下的位移來表示。而「運動量的變化」不是惠更斯與牛頓分別於 1659 年與 1669 年所言:從圓周上 B 點回到慣性運動直線上 C 點的位移 BC(圖 7)，反之它是 CB，代表從原初的動量 AC 指向後來的動量 AB。亦即在定律 2 出現了兩個前所未有的概念—動量變化與外力，這是其他物理學家與之前的牛頓本人，從未想過或使用過的方法。

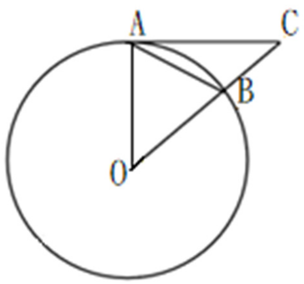

圖 7：惠更斯的離心力 BC 與牛頓的自原初動量 AC 指向後來的動量 AB 的向心力 CB

牛頓是以文字呈現出第二定律，他並沒有給出具體的數學運算式，若寫成運算

式，則定律 2 較接近日後的$\vec{F}=d\vec{P}/dt$而非$\vec{F}=m\vec{a}$。牛頓在提出此定律時，完全不知道等式左邊的力的形式是什麼，這也正是他想通過此定律去挖掘出物體的受力形式。

二、《原理》中第二運動定律的使用

基本上《原理》中的第二運動定律完全對等於《論運動》的預備定理 1，差別只在描述的方式是使用單一外力或兩力合成。若放棄使用固有力觀點(如圖 8)，則單一外力的作用於 A 點會造成物體的初動量 Aa 變成末動量 Ab，這對應於固有力與向心力的兩脈衝作用於起點 A 處所造成的合成位移 Ab。

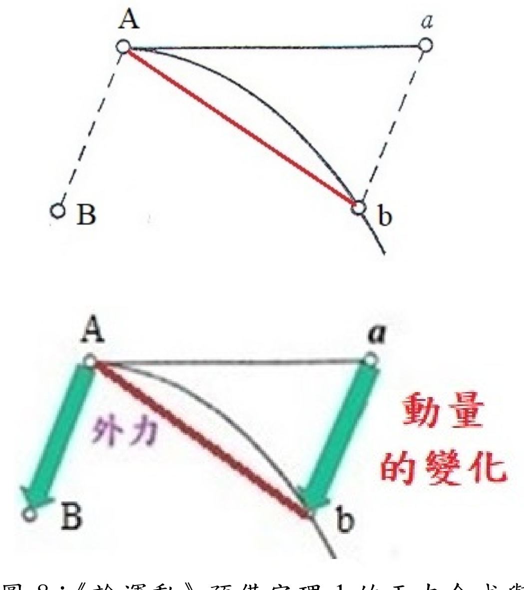

圖 8：《論運動》預備定理 1 的兩力合成與《原理》第二定律的運動量變化對應圖

現可簡單體會牛頓如何使用第二定律論證《原理》中的命題 2，它從未出現在之前的所有著作裡，但可視其為《論運動》定理 1 的逆命題。即僅引用單一外力觀點，直接尋找作曲線運動滿足面積律物體所受的力形式 (Newton, 1687)。

命題 2:作環繞運動的物體，若掠過的面積正比於時間，則它必受到向力心的作用。

証明:因作曲線運動物體偏離直線，由第一定律，它必會受到外力作用，接著試尋找此外力形式。由於物體滿足面積律，在相同時間下，面積$\Delta SAB=\Delta SBc=\Delta SBC$，故 cC∥BS (如圖 9)。由第二定律(充分與必要條件可互換)，物體在 B 點所受的外力必會正比於動量變化 cC，且方向相同，所以 B 點所受的外力為指向定點 S 的向心力。

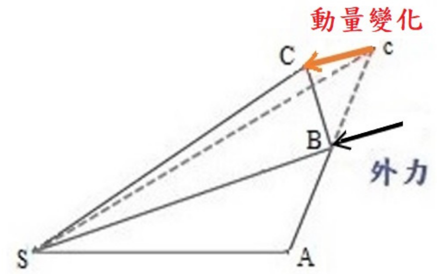

圖 9：牛頓以第二運動定律証明滿足面積律的運動物體必受向心力作用 (作者改繪)

牛頓就是利用第一與二定律証明出滿足面積律的圓周或橢圓運動，必受到向心力作用，而非離心力。並且在單一外力作用下，天體的運動與地表落體的運動完全來自於相同原因—它們的動量變化(或所受外力)皆與至力心的距離平方成反比，也由此建立了萬有引力定律。

伍、結論

物體的運動與原因一直是西方自然哲學探討的主題，早期認為運動原因來自於接觸作用，中世紀時則以不需靠接觸的形式概念—沖量—說明作等速直線運動的原因；笛卡兒續以固有力取代沖量來描述物體傾向保持原來運動狀態的原因；惠更斯繼之對作曲線運動物體總是朝向回到原先直線狀態的離心力，來解釋運動狀態改變的原因，並且首次成功地加以數學化，精確地表示出此改變原因的強度。

牛頓擴大發揮此種機械論數學化的方法，但在 40 歲後將運動改變原因的強度以向心力來代表，並結合固有力，以合力的位移闡述了克卜勒面積律，並證實橢圓運動的向心力與距離平方成反比，奠定了萬有引力定律的基礎。

最後在 45 歲時，牛頓放棄固有力觀點，將運動改變的原因完全歸因於單一外力作用，形成了日後物理學詮釋物體運動或變化的根本原因只有兩種:慣性與外力。

參考文獻

Mach, E. (1893). The Science of Mechanics, La Salle: Open Court Pub.

Coelho, R. (2007). The Law of Inertia: How Understanding its History can Improve Physics Teaching. Science & Education,16, pp. 955–974.

Dransfeld, K (2001). Physik I: Mechanik und Warme, 9th ed. Munchen: Oldenbourg.

Carson, R & Rowlands, S (2005) Mechanics as the logical point of entry for the enculturation into scientific thinking. Science & Education, 14, pp. 473–493.

Dijksterhuis, E. ([1961], 2015）：世界圖景的機械化(張卜天 譯)。北京：商務印書館。

Aristotle, ([322 BC], 1991)：物理學 (張竹明 譯)。北京：商務印書館。

Galilei, G. ([1638], 2019）：關於兩門新科學的對話 (戈革 譯)。台北：大塊文化。

Westfall, R. ([1977], 2000）：近代科學的建構—機械論與力學 (彭萬華 譯)。上海：復旦大學出版社。

Descartes, R.(1644). Principle of Philosophy, Boston:Reidel Pub., 37, Part II.

姚珩(2021)，牛頓如何想出第一運動定律，科學月刊，624，38-43 頁

Huygens, C. (1659). On Centrifugal force, https://www.princeton.edu/~hos/mike/texts/huygens/centriforce/huyforce.htm

Turnbull, H. (ed.) (1960), Correspondence of Isaac Newton, Vol. 2 (1676–1687), Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 297–314.

Newton, I. & Whiteside, D. (ed.) ([1684], 1974). Mathematical Papers of Isaac Newton, Vol. 6 (1684–1691), Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 30-75.

Brackenridge, J. (1995). The Key to Newton's Dynamics. Berkeley: Univ. of Cal. Press.

Newton, I. ([1687], 2019）：自然哲學之數學原理 (王克迪 譯)。台北：大塊文化。