

由推力與拉力介紹牛頓第二運動定律

$F=ma$ 是完整的嗎

姚珩 吳承宣 陳玠同
國立台灣師範大學物理系
台北市立建國中學

壹、教科書描述第二運動時使用的推力與拉力並非牛頓原意

牛頓(I. Newton, 1642-1726)的《自然哲學數學原理》是影響物理思維的劃時代巨著，其中三個運動定律則是該書的根本基礎，也是日後所有物理教科書中最重要的依據。從中學到大學的物理教材，對第二運動定律的描述普遍都使用推力與拉力做為實例。如教育部所編高中物理課本的一範例(吳大猷，2000)：

質量為 50 公斤的一木塊，以一繩拉之，使其在光滑平面上運動，
繩與平面成 37° 角，繩的張力 T 為 200 牛頓。求木塊的加速度。

美國大學普通物理教科書中的例題(Young, 2012)：

一質量為 40kg 的紙箱，靜止在摩擦力可以忽略的平面地板上。一工人
以 20N 的固定水平推力作用於此紙箱上，求紙箱的加速度為多少？

以上兩種介紹方式雖然沒有錯誤，但畢竟不是牛頓的原意，且過度簡化了「力」概念在歷史上逐漸形成的漫長過程，與所遇到層層的知性挑戰。上述教科書的範例易使學生認為：力就是每位初學者都可從日常生活了解，不該質疑，並應立即接受的概念。

底下我們將從歷史上第一次出現的力概念開始，來澄清推力、拉力與張力在牛頓之前從未出現過；並說明牛頓是如何詮釋第二運動定律中力的含意，供教師與學生們參考，藉此也可透視一般教科書無法充分闡述力概念的不足處。

貳、古希臘時期的推、拉與力

(一). 運動原因的定性描述——推與拉

推(push)與拉(pull)的術語最早出現在亞里士多德(Aristotle, 384-322 BC)的《物理學》一書 (Aristotle, 1991)，在該書中推與拉分別出現 32 與 22 次，力

(δύναμις, force) 則出現 34 次。推與拉二詞幾乎全部寫在第七章第四節 243 段裡，他如此描述(Aristotle, 2019; Barnes, 1991)：

被他物推動的物體，其運動必定以下面四種方式進行：推(pulling)、拉(pushing)、帶、轉。...推和拉的作用物(或代理者，agent)必須與承載物(load)直接接觸，也就是推動者或物(mover)與被推動者或物(moved)之間無任何東西存在。...

推是從作用物將他物移到其他地方;拉是將他物從其他地方移向作用物。(pushing moves things away from the agent to some other place, and pulling moves things from some other place to the agent.)

亞里士多德認為推與拉是造成物體運動的兩種方式，但他並未將此二概念與力結合在一起，也沒寫下推力與拉力(push force, pull force)二詞。僅做了定性描述，沒有任何相關的量化數值，它們是無法測量的。

(二). 推動者的力—動力學中的量化原理

在最早期力如何定義?力與運動有何相關?如何影響運動?亞里士多德在其著作裡並未明顯寫下力的定義，但在第七章第五節 249 段裡，藉著導致物體運動的原因—推動者的力(force, motive power)，以及力與被推動物運動快慢的重要量化關係，由此可以體認古希臘時期力的涵義(Aristotle, 2019; Barnes, 1991)：

假如 A 是推動者，B 是被推動者，D 是行進的距離，T 是花費的時間，則 A 可推動 B/2 的重物，在時間 T 內移動 2D 的距離；而 A 也可推動 B/2 的重物，在時間 T/2 內移動 D 的距離；因為這樣的比例規則是觀察到的。

同樣，如果力 A 可使重量 B 的物體(a force A moves weight B)，在時間 T 內移動距離 D，則 A 可使 B 物體在時間 T/2 內移動 D/2 距離；同理，一半的力(force) E (=A/2)可將一半的重物 F (=B/2)，在時間 T 內移動距離 D。因為力 E 與重量 F 的關係與力 A 與重量 B 的關係相同。

因此，在相同的時間 T 內，E 可將 2F 的重物移動 D/2 的距離。若 E 等於力 A 的一半，F 為重量 B 的一半，則此二者的比值正比於距離和時間的比值；使得一單位的力可使物體在相同的時間內移動相同的距離。

上面論述若以現今概念可闡釋如下(Jammer,1957)：

- (1)力是推動物體 A 所攜帶的一種物理量，它的大小可由被推動物體 B，在時間 T 內移動距離 D 的比值(即速率 v)來衡量。
- (2)A 物體的力可視為質量與速率的乘積，或動量。在接觸時，力全部傳給 B 物體，之後 A 不再運動，B 開始作等速運動。
- (3)若以 P 代表物體 A 的力， m 表示物體 B 的重量，接觸後 B 的速率與力 P 成正比，與重量 m 成反比，而有：

$$\frac{P}{m} = v = \frac{D}{T}$$

此關係式便可呈現古希臘時期力概念的意義(圖 1)。

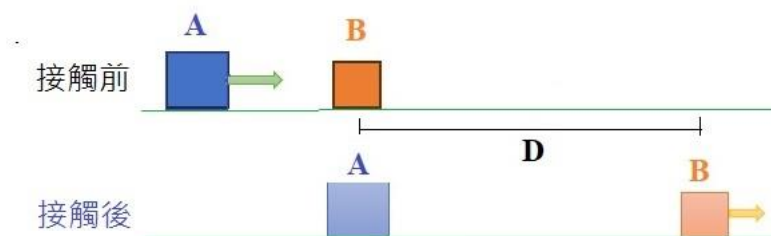


圖 1: 推動物體 A 的力傳送給被推動物體 B，造成 B 在時間 T 內移動距離 D

後來六世紀菲洛彭諾斯(Philoponus,490-570)與十四世紀法國人布里丹(Buridan,1300-1358)認為被擲出的石塊可以不必靠接觸，而能繼續運動下去，是因石塊從推動者獲取讓它能維持運動下去的動力，此種力被稱作物體內部的衝力或原動力(impetus)，基本上仍保留了古希臘所言推動者攜帶的力的部分涵義(Dijksterhuis,1961;Westfall,1977)。進一步也可看出，力概念的出現從早期便只與物體運動緊密相關，與靜力學裡所施加的拉力或張力並無關係。

叁、文藝復興時期的靜力平衡——只有重量概念

(一) 史蒂文是用重量來描述靜力平衡

長期以來，國內外不少教科書都從靜力平衡來介紹牛頓運動定律所需使用的力概念。但在牛頓之前的靜力平衡並未出現過推力與拉力的術語，靜力平衡都是直接或間接與重量聯繫在一起。

靜力學的創始者荷蘭科學家史蒂文(S. Stevin, 1548-1620)約於 1610 年發現在

三角形 ABC 上放上一鍊條，當平衡時愈長的面可以承載愈多的鐵球(圖 2)，得出斜面規則：在平衡時，兩傾斜面上所支撐重物的重量與重物所在斜面的長度成正比(Mach, 1989)。

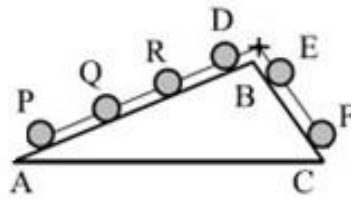


圖 2：史蒂文的斜面規則——兩斜面支撐的重量與所在斜面長度成正比

史蒂文進一步利用此斜面規則，論證推廣到一木塊平衡時，重量與斜面長的對比關係。如圖 3，一平板置於一三角錐上達到平衡時，兩懸掛重物分別所提供的直接上提(direct uplifting)作用 M 與水平支撐作用 P ，兩者的比值等於通過木板重心 D 所形成三角形 LDO 的兩邊線段比，即 $M:P = LD : DO$ (Capecchi, 2012)。

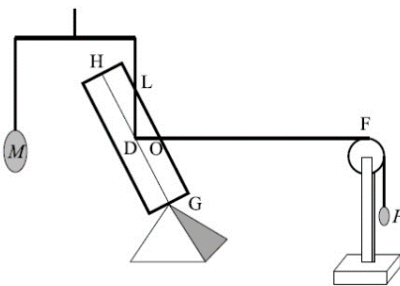


圖 3：由斜面規則，木板平衡時，兩重物分別所提供的直接上提作用 M 與水平支撐作用 P 之比，等於三角形 LDO 對應線段之比，即 $M:P = LD : DO$

(二)靜力平衡下的平行四邊形加法原理

在同一著作裡史蒂文再寫下一重要的靜力平衡時的平行四邊形加法規則。藉著兩條傾斜細繩，與重物 G 與 H 連接，另兩條垂直細繩藉著中間兩個小槓桿，與重物 I 與 K 維持平衡，如圖 4。此四條細繩讓長形木板 ACBD 保持靜止，則由斜面規則，可得到對應的重量與線段的比值關係(Capecchi, 2012)：

$$G:I = LE : EN$$

$$H:K = MF : FO$$

I 與 K 可視為平均分担柱子的部分重量，即 $I = K$ ，亦可表示為 $EN = FO$ ，上面兩等式相除後可得：

$$G:H = LE : MF$$

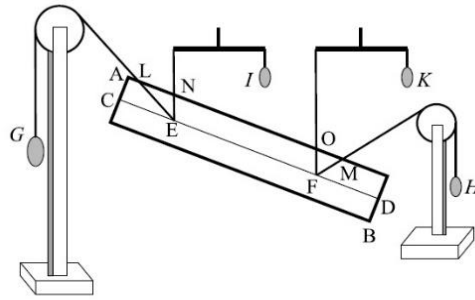


圖 4：由兩傾斜繩子所支撐的平衡柱

兩條直接上提的作用為重物重量 $I + K = 2I = 2K$ ，若由對應的線段來表示，即為 $EN + FO = 2EN = 2FO$ 。最後，將 G 與 H 重物所代表兩條傾斜上提的作用等價於重物 I 與 K 形成的垂直上提作用，分別轉換成對應的線段來表示，就形成了史蒂文所建立的平行四邊形加法定律，如圖 5 (陳玠同，2024)：

若傾斜上提作用 EL 與 FM (或 EM)為四邊形的兩邊，則其合成效果為對角線長 $2EN$ 。

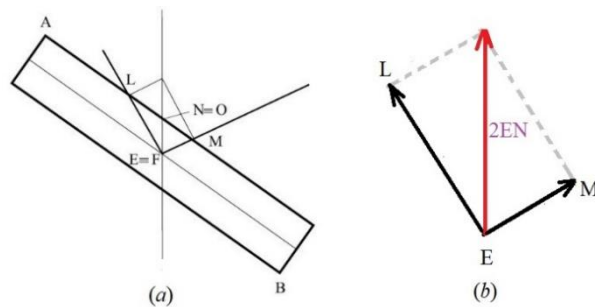


圖 5：史蒂文的 (a)平行四邊形加法定律 (b)以現代的向量圖表示

此規則對日後牛頓所言：兩脈衝力造成物體位移的合成方法有著明顯影響。上面所述主要欲呈現在 17 世紀前的靜力學，還沒有拉力，推力與張力的用詞，全部都是以物體的重量來表示。因此使用拉力、推力與張力作為介紹牛頓運動定律，與歷史的思維發展並不符合。

肆、最接近現代意義的力為固有力—古希臘的力實則為動量

笛卡兒(R. Descartes, 1596-1650)在其《哲學原理》著作裡首次寫下(Descartes, 1644)：

靜止物體有著維持在靜止的力（a force to remain at rest）。.....

若物體為靜止狀態，除非受到外在影響，它絕對不會開始運動。

接著提出書中的第一自然律：

每一物體在其自身強度(power)內，將一直維持於相同的狀態；

一旦它運動後，則會繼續運動下去。

換言之，不論是靜止或運動物體，他們都有維持在原來狀態的趨勢或奮鬥(end endeavor)。他使用阻止力(force of resistance) 或天生之遲鈍性(natural sluggishness)來描述此種趨勢，其意義與「慣性」(inertia)相似，該拉丁文原意為惰性(idleness)或懶性(laziness)，代表對運動的一種阻礙 (Dijksterhuis, 1961)。

四十年後，牛頓將笛卡兒此種惰性、慣性的想法寫在他《原理》一書中首頁八個基本定義的第三個 (Newton,1687)：

慣性力(inertial force)或物體的固有力(innate force)是一種存在於物體

內部的阻力(power of resisting)，藉著它，物體將竭盡維持其目前狀態，

不論是在靜止或作等速直線運動。

這是史上第二次清晰出現的「力」概念。此固有力有兩種內涵：對靜止物體而言，它代表現代的慣性或質量概念；對運動物體而言，笛卡兒稱它為運動物體的力(force of moving body)或運動量(quantity of motion)，它是物體體積與速度的乘積 (Westfall, 1977)，近似於現代所言的動量概念。而古希臘第一次出現的力觀念，可看出近似於笛卡兒或牛頓所言的運動物體的固有力，也就是動量(付麗萍，2021)。

正如力學與科學史專家特魯斯德(C. Truesdell,1919-2000)認為：在牛頓之前有力的相似字，但它只是一個通俗的字，這字有時很不嚴謹地用在科學著作裡，但是它從來沒有被視為是基本的(Truesdell, 1968)。推力、拉力與張力在牛頓之前同樣也沒正式被定義使用過。

伍、平面運動與力—藉尋找加速度發現外力

(1)力的定義

今天常使用的力或外力定義正式來自於牛頓 45 歲時的《原理》一書中 (Newton, 1687)：

定義 4：外力(impressed force)是施加在物體上，用來改變其靜止或等速運動狀態的作用。

也就是如果一物體的狀態發生改變，則不論你是否觀察到，必定有一力作用在該物體上。而牛頓最常使用到的兩種外力是阻力(resistance)與因碰撞所產生的脈衝力(impulse)，卻從未使用過推力、拉力、張力或彈力，且他都是用清楚的數學關係來表示阻力與脈衝力(Newton, 1974)。

牛頓面對的自然不是簡單的蘋果落地，而是天上各行星的運動現象，尤其是克卜勒(J. Kepler, 1571-1630)的三個行星定律(Koyre, 1965)。因此直線運動不是他感興趣的運動，物體在平面上曲線運動的路徑才是他的思維核心。

(2)尋找速度變化—由曲線軌跡尋找外力

為了探討物體在平面上的運動，牛頓在 1687 年發表了劃時代的第二運動定律(Newton, 1687)：

定律 2：運動量的變化與外力成比例，且運動量的變化是沿著外力的直線方向上。

其中運動量就是現代所說的動量，它可用速度或在固定時間下的位移來表示。而「運動量的變化」代表從原初的動量 AB 指向後來的動量 AC，也就是 BC (圖 6)。亦即在定律 2 出現了兩個前所未有的概念—動量變化與外力，這是其他物理學家與之前的牛頓本人，從未想過或使用過的方法。

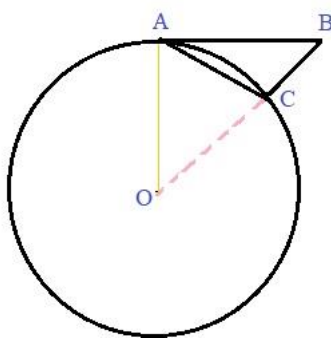


圖 6：牛頓最先提出運動量的變化是從初動量 AB 指向末動量 AC 的 BC

牛頓是以文字來表述第二運動定律，他並沒有給出具體的數學運算式。若寫成運算式，則定律 2 較接近日後的 $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ 而非 $\vec{F} = m\vec{a}$ 。牛頓在提出此定律時，完全不知道等式左邊的力的形式是什麼，這也正是他想通過此定律去挖

(3) 第二定律重要的應用——橢圓運動與距離平方反比力

命題 11: 物體沿橢圓運動, 求指向橢圓焦點的外力(反比於到焦點距離的平方)。

在此段時間 t ，動量或速度變化率為該段時間的速度變化，也就是位置變化與 t^2 之比，即為 RQ/t^2 。又由《原理》的命題一：指向焦點的向心運動滿足面積律，即時間可以三角形面積 $SP \times QT/2$ 來表示，故速度變化率正比於 $RQ/(SP^2 \times QT^2)$ 。

$$\text{RQ}/(\text{SP}^2 \times \text{QT}^2) \propto 1/\text{SP}^2 \propto 1/r^2$$

第二定律指明：探討曲線運動的物體位置或跟蹤其軌跡，並無法得到有意義的深層結構，只有尋找該物體的速度變化或加速度，才能得到曲線運動背後所隱藏前人不知的奧秘。也就是說不是物體的位置，不是速度，而是速度變化，才是第二運動定律的真正要點所在。

陸、孔恩對物理教科書的觀點與建言

科學史家孔恩(T. Kuhn, 1922-1996)在其重要著作《科學革命的結構》第 11 章裡，對一般教科書的不足處提出相當獨到的見解與針砭。他如此說(Kuhn, 1962):

一般人對科學活動的印象來自同一個權威性的源頭…這權威性的源頭我
心中主要想到的是科學教科書，…教科書著意於傳達當代科學語言的詞彙與語
法。…為了執行它們的功能…它們沒有必要提供真實的消息…甚至有很好的理
由來解釋為什麼應該系統性地誤導讀者。

所以教科書一開始就斬除科學家對他那一行的歷史感，…為著一些明顯而
功能性的理由，科學教科書只會提到過去科學家研究的一部份，…部份出自揀
選、部份出自扭曲。

…科學彷彿是一個累積事業，直線地朝向今天有利的境地發展的過程。把
歷史寫成為現在鋪路的歷程的誘惑無所不在，這種對歷史事實的漠視，深刻而
功能性地植根於科學行業的意識形態中。…結果造成一種持續的傾向，企圖使
科學史看來是直線發展的或累積性的。…

教科書傾向於把科學的發展線性化了，科學發展最有意義的插曲的核心過
程就這樣給掩蓋了。

不論是大學或中學的教科書，主要都是針對一二十歲的年輕學子而寫，他們
要學的科目眾多，時間卻有限，如何可能在有限的時間完全體會一兩千年發展出
來的科學文明？因此教科書必須採取一些功能性的措施，讓學習者直接接受當代
最後的科學結論，期待能立刻使用這些科學知識，去解題考試或處理工作上的問
題。教科書無法去細說這些知識的來源背景與演進過程，自然無法反映出知識的
整體面，有時篩選出的材料甚至扭曲與背離事實。

譬如，利用靜力學中的拉力來指示牛頓運動定律的外力，雖然可以解決一些
工程力學的問題，但卻無法理解牛頓的力概念與運動定律是如何辛苦地被創造出
來，僅能勉強地、被動地去接受。孔恩繼續寫著(Kuhn, 1962):

因為教科書的著眼點在於使學生迅速地熟習那些當代科學必須知道的事，
教科書盡可能分門別類地處理各式各樣的實驗、觀察、定律與理論。就教學而
言，這種鋪陳的技術無可非議，…但有時會出現系統性的曲解。…教科書的寫

法暗示：打從一開始，科學家就在當代科學教科書的知識體上，一個接著一個加上另外一件事實、一個觀念、一條定律、或一個理論。…但是科學不是那樣發展的。

科學的發展非常錯綜複雜，不是單純線性的累積而成，也不是簡單的歸納法或演繹法可以完成的，有時甚至沒有一定的方法，它是一種創意，這是教科書所無法呈現的。利用推力、拉力、張力與彈力來詮釋牛頓運動定律，太過於簡化，此種陳述背離牛頓原意，牛頓是為了解決天體運動而提出他獨到的運動定律。面對教科書這些無法避免的缺憾，要如何來改善呢？孔恩結論到：

教學形式能決定我們對科學本質的看法，以及體會發明與發現在科學進展中所扮演的角色。

柒、結 論——牛頓定律是藉著探討曲線加速度來發現運動規則

力學是古典物理的基礎，牛頓為古典物理學家的集大成者，力則是力學裡最主要的觀念，而牛頓運動定律則為物理學中的核心原理。力概念與運動定律絕非僅憑著教科書有限的論述就可善盡完成。

推與拉最早出現在古希臘時期，但只是定性地被描述成運動進行的兩種方式。同時第一次出現的力概念則被視為儲存在推動者內的運動強度，它可藉著被推動物體的速率來量化。推力與拉力是牛頓之後的科學家才將它們與運動定律連接，並應用在工程問題上，牛頓終其一生並不知何謂推力與拉力，也沒有使用它們處理過任何科學問題。

史上第二次出現的力概念則是笛卡耳的固有力——對靜止物體而言，它對應於現代的質量；對運動物體而言，它對應於現代的動量。第三次出現的力名詞則為牛頓的外力或向心力，牛頓常以接觸的脈衝力來表示它。第二運動定律的目的主要在處理圓與橢圓的曲線運動，其關鍵在揭示：須尋找到物體的速度變化，方能建立起運動背後的基本結構。

工程科技問題並未引起牛頓注意，是困惑西方千年之久天體運動的問題引領其無悔投入，他竭盡所能藉著提出明晰的力概念、與深刻的運動定律，終讓迷霧消除，曙光乍現。中間的發展過程絕不是僅靠邏輯推理就可達成，那是一種創見與典範轉移。科學教科書由於著重在現代最終的理論結果，常省略了重要物理概

念所隱藏的複雜及豐富的歷史過程。這些無法寫入教科書裡的內涵，則有待教學者適時地以創意的教學方式，給予妥當的詮釋補強，以彌補學習者在教科書中無法獲得的知識和思維。

參考文獻

吳大猷 (1999)：高級中學物理，第一冊。台北：國立編譯館。

Young, H. (2020). *University Physics with Modern Physics* 15th ed. Pearson Pub. San Francisco.

Aristotle ([350 BC], 2019)： *Physics*, classics.mit.edu. The Internet Classics Archive. translated by Hardie and Gaye.

Aristotle (350 BC)：物理學 (張竹明 譯)。北京：商務印書館，1991。

Barnes, J. (1991). *Complete Works of Aristotle*, Vol.1 (Physics), Princeton Univ Press, Princeton, N.J.

Jammer, M. (1957). *Concept of Force*, Dover Pub. New York.

Mach, E. ([1893], 1989). *The Science of Mechanics*, La Salle：Open Court Pub.

Dijksterhuis, E. (1961)：世界圖景的機械化(張卜天譯)。北京：商務印書館，2015。

Westfall, R. (1977)：近代科學的建構—機械論與力學(彭萬華譯)。上海：復旦大學，2000。

Capecchi, D. (2012). *Historical roots of the rule of composition of forces*, *Meccanica*, 47, 1887-1901.

陳玠同、吳承宣、姚 玠 (2024)，從文藝復興伽利略及牛頓的平行四邊形加法定律審視力概念的形，科學教育月刊，474，35-43 頁。

Descartes, R. (1644). *Principle of Philosophy*, Boston：Reidel Pub., 37, Part II.

Newton, I. (1687)：自然哲學之數學原理(王克迪譯)。台北：大塊文化，2019。

付麗萍、陳玠同、姚 玠 (2021)，西方早期到牛頓時期力概念的發，科學教育月刊，440，18-25 頁。

Truesdell, C. (1968). *Essay in the history of mechanics*, New York：Springer Pub.

Newton, I. & Whiteside, D. (1974). *Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. 6 (1684–1691), Cambridge：Cambridge Univ. Press, pp. 30-75.

Koyre, A. (1965)：牛頓研究(張卜天譯)。北京：商務印書館，2016。

姚 玢、楊艷玲、吳承宣 (2023)，牛頓如何想出第二運動定律——由早期運動的原因到外力概念的出現，科學教育月刊，460，15- 23 頁。

Brackenridge, J. (1995). *The Key to Newton's Dynamics*, Berkeley：Univ. of Cal. Press.

Kuhn, T. (1962)：科學革命的結構(王道還譯)。台北市：遠流，1989。