從文藝復興伽利略及牛頓的平行四邊形加法定律審視力概念的形成

陳玠同 吳承宣 姚 珩

壹、前言

在高中與大學的物理教學中，有關兩個「外力」的合成方法均使用幾何學上所描述的平行四邊形加法定律、或是對應的向量合成規則。但是向量的定義是在 19 世紀中期才被引入(Hamilton, 1844)，也就是說現今將平行四邊形加法定律與向量合成規則視為同義等價，是為了教學方便的權宜之計，而非歷史事實。因此這樣的處理方式很容易讓學生認為:平行四邊形加法定律與向量的合成規則密切相關，或是屬於同時發生的歷史事件。這不僅過度簡化了日後力概念的意義，也掩蓋了力概念發生的困難與建立的可貴。

本文將指出在向量概念發生之前，平行四邊形加法定律曾使用在三個不同的重要時段:文藝復興、伽利略(G. Galileo, 1564-1642)與牛頓(I, Newton, 1642-1726)時期。且在此三個時期，平行四邊形兩邊所代表的物理意義完全不同。文藝復興所描述的兩個量是重量與上提作用，伽利略所感興趣的兩個量是水平等速位移與垂直等加速位移，而牛頓所探討的量是固有力與瞬間脈衝力作用在同一物體後的等速位移。

由此可體會，重要物理概念的發生不是一蹴可幾。最後牛頓藉著平行四邊形加法定律，引入了固有力與脈衝向心力作用在同一物體後的合成觀點及運算法則，建立起古典力學力概念的發展基礎，和影響深遠的思維方法。

貳、文藝復興時期的平行四邊形加法定律—重量與上提作用

(一) 達文西討論重量如何分配在兩傾斜繩上

亞里斯多德(Aristotle,384-322 BC)在其著作《機械問題》中提到的槓桿平衡原理 (Dijksterhuis, 1961)是如此描述：

可以繞 O 點轉動的槓桿，其重量可忽略不計，若兩端點 A_1 與 A_2，分別載重量 W_1 和 W_2，則槓桿維持平衡條件為 $W_1 : W_2 = OA_2 : OA_1$。

文中並無重力與力臂的術語，也沒有施加於槓桿上外力的觀點，主要的物理量是重量。靜力學中所言的推力、拉力或力矩，皆為日後的物理學者所附加上去的。

古希臘之後一直到文藝復興的達文西(L. da Vinci, 1452-1519)首次討論重量如何分配在兩傾斜繩子上，才清楚出現重量與繩子支撐作用關係的討論 (Hart, 1925)。大約 1508 年達文西在他的筆記裡寫下(圖 1):

當懸掛重物與支撐繩子形成特定角度時，重物會把它的重量分配在角的兩邊，其比例等同於兩邊傾斜度的比例 (與垂直線的夾角越大，傾斜度也越大)。或者這樣的重物會將其自身分配給其支撐繩子，其比例會與懸掛重物形成的兩分開角度的比值相同……。 因此，線 *cb* 所切開的角度 *abd* ，若形成角度 *cbd* 為角 *abd* 的 9/11，角 *abc* 為 2/11；則分配在 *ab* 上為重量的 9/11，*db* 為 2/11。

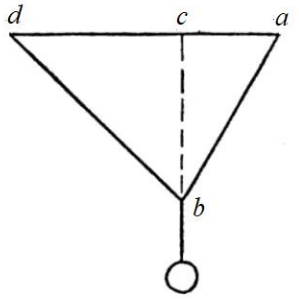

圖 1：達文西手稿中重量分配在兩支撐繩上的比例

達文西在此的措辭有些鬆散，前半段的文字所指的應該是與傾斜角度成反比，如此才能與後半段數字例子一致。但即便如此仍然有誤，因為重量分配在兩邊的水平分量比值應與傾斜角的正弦函數成反比。雖然如此，但他的論證卻是首開先河，不僅開創了重量在兩條繩子上的分解規則，也開啟了日後向量分解的思維基礎。

在此也可看出這段期間科學家們只有重量，而沒有重力概念，也只有繩子的支撐，沒有張力(tension)一詞。

(二) 史蒂文首次正確提出平行四邊形加法定律

承繼著達文西重量分解的突破性觀點，荷蘭科學家史蒂文(S. Stevin, 1548-1620)後來在平行四邊形加法定律的詮釋與貢獻，使他成為靜力學的創始者。欲明白此定律，必須先了解他的斜面規則。

(1) 斜面規則

在 1605-1608 年間史蒂文的力學與數學著作裡，他考慮了一條繫有 14 個等重球體的鏈條，放在三角形 ABC 上，在滑動不久後，鍊條一定會靜止下來，因為鍊條一直持續在運動是不可能的。在此平衡狀況下，於圖 2 中 S 與 V 處剪去底下的球體，平衡狀況將依然維持，並可看出愈長的面可以承載愈多的球，因此他得出了下述的斜面規則(Capecchi, 2012):

在平衡時，兩傾斜面上所支撐重物的重量與重物所在斜面的長度成正比。

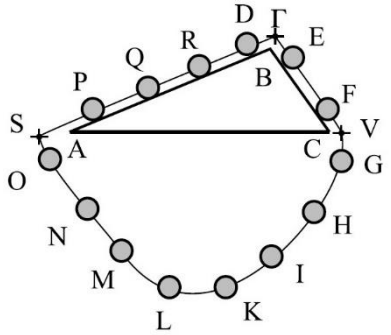

圖 2：史蒂文的斜面規則: 兩斜面支撐的重量與所在斜面長度成正比

史蒂文進一步利用此斜面規則，探討一平板置於一三角錐上達到平衡時，兩懸掛重物分別所提供的「直接上提」(direct uplifting)作用與水平支撐作用比的關係(圖 3)。在左上角小槓桿因處於平衡，透過重物 M 將木塊上提的作用就等於 M 的重量。在此史蒂文稱此槓桿右方的作用為直接上提，仍未出現張力一詞。由斜面規則，三角形兩邊的長度與所支撐的重量成比例，故直接上提作用 M 與水平支撐 P 之比值，等於所在重心 D 附近所形成的三角形 LDO 的兩邊線段比，即$M: P = \mathrm{DL} : \mathrm{DO}$。

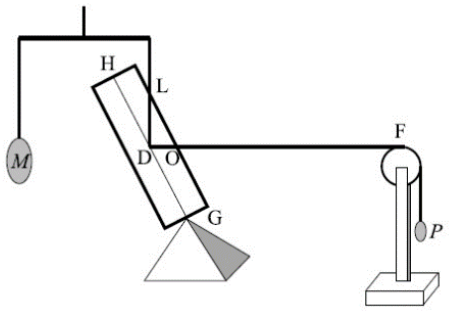

圖 3：史蒂文斜面規則的應用: 木板平衡時，兩重物分別所提供直接上提作用與水平支撐作用之比等於對應線段之比 $M:P = \mathrm{DL}:\mathrm{DO}$

史蒂文接著論證此關係也可推廣到直接上提與傾斜上提(oblique uplifting)時，重量與線段長的對比關係，且將此關係應用到後續的平行四邊形加法定律中。

(2) 與現代斜面規則的對比

若以現今的牛頓力學來分析，史蒂文的斜面規則可以下圖 4 來類比：

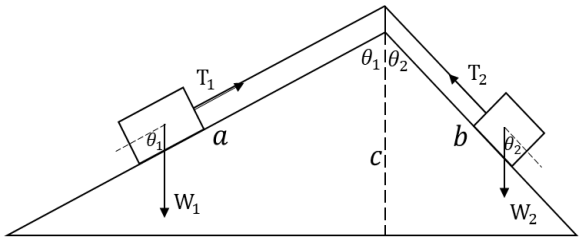

圖 4：現今斜面規則—平衡時 $W_1:W_2 = a : b$ 示意圖

在兩邊斜面上的重物分別為 W_1 與 W_2，若維持平衡，則兩條繩子張力相等，即 $T_1=T_2$，故有

$$W_1\cos\theta_1 = W_2\cos\theta_2$$

又由兩邊長a, b與重直高度c的關係:

$$a\cos\theta_1 = c = b\cos\theta_2$$

可得

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{a}{b}$$

此式即為是史蒂文的斜面規則，但上述的近代做法是引用了物體的重

力、繩子張力、與物體靜止時合力為零的牛頓第一運動定律。這些都是文藝復興時期的科學家並不知道的概念。

(3) 平行四邊形加法定律

史蒂文在同一著作裡寫下了重要的定理 18 (圖 5)：

> 若藉著兩條傾斜上提繩子提供的作用，可使柱子維持平衡，則它們與兩條直接上提作用的對比關係，等同於單一傾斜上提與單一直接上提的對比關係。

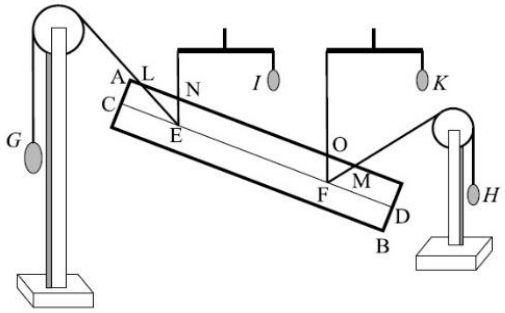

圖 5：由兩傾斜繩子所支撐的平衡柱

因此當柱子平衡時，兩條傾斜上提繩子所提供的作用，具有個別之傾斜與直接上提所對應的重量比與線段比的關係，類似圖 3 所示，即

$$G : I = \mathrm{EL} : \mathrm{EN}$$

$$H : K = \mathrm{FM} : \mathrm{FO}$$

如果點 E 與 F 至柱子中心的距離相等，由於中間兩個小槓桿處於平衡，透過兩重物 I 與 K，在 E 與 F 處將柱子直接上提的作用會分別等於重量 I 與 K，且 I 與 K 可視為柱子重量 W 的一半，即 $I = K = W/2$。又 $\mathrm{EN} = \mathrm{FO}$，上面兩等式相除後可得：

$$G : H = \mathrm{EL} : \mathrm{FM}$$

所以透過重物 G 與 H 所表示不連接的兩條傾斜上提的繩子同時作用時，其對比效果可由對應線段 EL 與 FM 的長度共同來表示。

另一方面，兩條直接上提的作用為重物重量 $I + K = 2I = 2K$，若由對應的線段來表示，即為 $\mathrm{EN} + \mathrm{FO} = 2\mathrm{EN} = 2\mathrm{FO}$。

最後，將 G 與 H 重物所代表兩條傾斜上提的作用等價於重物 I 與 K 形成的垂直上提作用，分別轉換成對應的線段來表示，就形成了史蒂文所建立的平行四邊形加法定律 (圖 6)：

若傾斜上提作用 EL 與 FM(或 EM)為四邊形的兩邊，則其合成效果為對角線長 2EN。

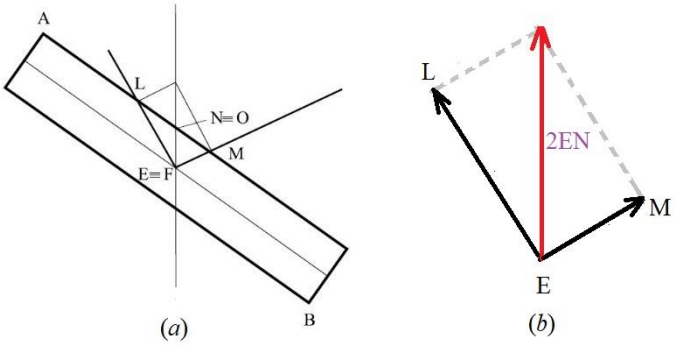

圖 6：史蒂文的(*a*)平行四邊形加法定律 (*b*)現代的向量加法對照圖

叁、伽利略的平行四邊形加法定律—水平與垂直位移的合成

歷史上平行四邊形加法定律出現的第二階段發生在 1638 年伽利略的重要著作《兩門新科學對話》中，書中他宣揚對落體運動的處理不在於尋找重物下落的原因，而在於把握如何描述落體的運動現象(Galilei,1638）。受到前人哥白尼 (N. Copernicus,1473-1543) 對天體運行依循最簡單和諧的幾何結構的影響，伽利略認為落體運動也應按照最簡單的數學規律—垂直下落速度與時間成正比 $v \propto t$的等加速度進行，從而得知下落距離與時間平方成正比 $s \propto t^2$。他進一步地由此去探討水平拋射的運動路徑，主張水平方向的等速位移 *bc* 或 *bd*，與垂直方向的等加速度位移 *bj* 或 *bg*，合成的長方形對角線 *bi* 或 *bf* 是水平拋射的最終位移(圖 7)。

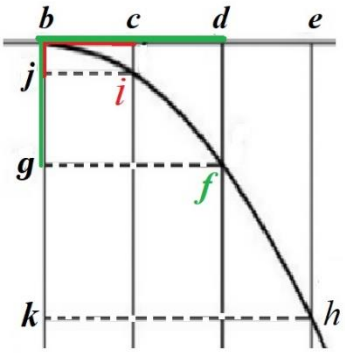

圖 7: 伽利略《兩門新科學對話》裡水平拋射運動的合成圖

這裡四邊形的兩邊分別為水平位移與重直位移，其合成位移則為對角線的長度。它們不代表重量與支撐作用或張力，與史蒂文平行四邊形的加法規則，方法一致，但物理意義卻截然不同。伽利略位移的合成內涵對日後牛頓思考二力共同作用於物體後的運動路徑啟發很大。

肆、牛頓的平行四邊形加法定律—固有力與脈衝力作用後的合成位移

笛卡兒(R. Descartes, 1596-1650)在 1644 年的《哲學原理》著作裡寫下關鍵的第一自然律(Descartes, 1644):

> 每一物體由於它本身的強勢(power)，總是保持在同一狀態(state);因此當它一旦運動，它就會繼續地運動下去。

此運動物體內在的自身強勢，40 年後牛頓定義它為固有力(innate force) ，成為歷史上最早出現的「力」名詞。正如力學專家特魯斯德爾認為:在牛頓之前有力的相似字，但它只是一個通俗的字，這個字有時很不嚴謹地用在科學著作裡，但是它從來沒有被視為是基本的(Truesdell, 1968)。

1684 年牛頓在《論運動》定義了第二個新的力名詞—向心力:

> 定義 1. 物體被推動或吸引，朝向中心點的趨勢，稱為向心力(centripetal force)。

接著寫下全書最重要的論證基礎—預備定理 1 (Brackenridge, 1995)：

> 二力一起作用於物體上，可由一平行四邊形的對角線所描繪，其兩邊為二力分開作用後，經過相同時間的結果所描繪。(A body, with forces having been conjoined, describes the diagonal of a parallelogram in the same time as it describes the sides, with forces having been separated.)

牛頓在此處所說的力只有兩種，即前面所言的固有力與向心力。固有力一直儲存在物體內，使物體維持著等速直線運動；而向心力則需符合笛卡兒所稱一物體對另一 物體直接接觸所造成的影響，為瞬間接觸的「脈衝力」(impulse)。因此在此二力瞬間作用完後，均可引用由笛卡兒所述:物體將竭盡維持著等速直線運動狀態，自 A 點分別運動至 B 點與 C 點，如圖 8。預備定理指出固有力

與脈衝向心力合成作用的位移結果，就是 AB 與 AC 的所形成平行四邊形的對角線 AD。

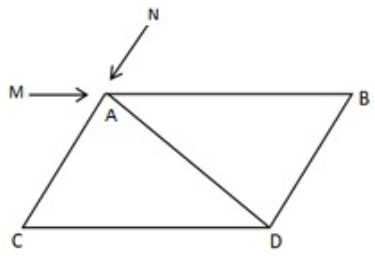

圖 8：《論運動》中固有力 M 與脈衝力 N 瞬間作用完後物體的位移為 AD

利用此預備定理，牛頓可推得《論運動》中的面積律:物體在向力心作用下，在相同時間掠過相同的面積。在論證中，如圖 9，若物體在 B 點受到脈衝的向心力作用，與它原來的固有力合成，在一段時間後，其位移將會由固有力造成的等速位移Bc，與向心力瞬間作用後造成的另一等速位移BV，所形成平行四邊形的對角線 BC來表示。

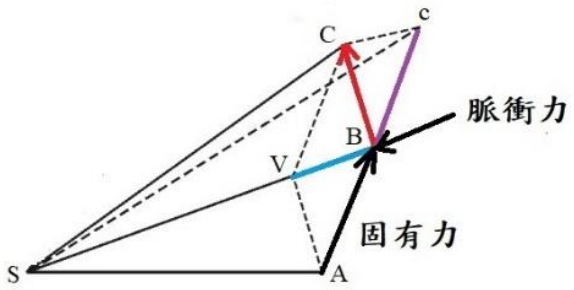

圖 9：《論運動》中二力的合成作用依循平行四邊形的加法定律

此預備定理不斷地被應用在牛頓後續的論證裡，它可證明《論運動》中的四個定理—面積律、圓周律、橢圓律與週期律，這些也全都是以後《自然哲學的數學原理》中的核心命題 (Newton, 1687)。甚至可說牛頓第二運動定律幾乎完全等價於此預備定理(姚珩，2023)。

伍、討 論

(1) 文藝復興之前並沒有清晰的力概念。達文西提出重量如何分配在兩條傾斜支撐繩子上的規則，開啟了重量的分解方法。史蒂文利用他的斜面規則，正確

地描述出兩條繩子傾斜上提的作用，如何可合成垂直上提的作用，而得以首次成功建立起平行四邊形加法定律。嚴格而言，他所指的繩子上提作用還不知道是一種力，將其翻譯為張力，容易造成學習者將它視為日後牛頓所言的一種外力，而與牛頓的力觀念混為一談。

(2) 最早出現的力概念是笛卡兒的固有力，第二個力概念是牛頓所言具有脈衝性質的向心力，此二力同時瞬間作用在物體後的等速位移，遵循平行四邊形的加法定律，最終位移將落在對角線的端點上。與現今所言兩作用力的向量加法的意義，並不相同。

(3) 今天一般物理教科書中常說的力的平行四邊形加法定律，是近一百多年來才有的描述，基本上它來自於數學的向量加法規則，然後將向量取代為力之後所得到的結果。但這種結果與描述並不代表科學家們一開始就知道向量或力的意義及其運算規則，今日對力的平行四邊形加法定律的陳述，和歷史上最初三位代表性人物所描述的內涵皆有所差異。

陸、教學建議

(1)兩力的平行四邊形加法定律是在向量概念發生之前——歷史上最初的兩力合成不是將向量取代為力，然後按照向量加法規則來描述。若非要使用教科書上所介紹的向量加法規則，教師宜簡單說明其歷史背景，指出物理的力合成概念是出現在數學的向量加法之前。

(2)靜力平衡應在牛頓運動定律之後介紹 —— 高中物理與大學力學教科書，常先交代靜力學的力平衡，或讓學生直接接受:推力、拉力、張力與彈力是在牛頓運動定律提出之前，每位科學家已經具備的力概念。此種陳述不符力學史實，是教學上為節省時間的妥協策略，無法顯示牛頓首次提出力概念的重要意涵。

(3)詮釋牛頓第二運動定律時，不宜只以推力、拉力、張力與重力當作外力——牛頓本人所描述的運動定律裡，物體受到外力作用後所產生的加速度，並非來自推力、拉力或張力，而是靠著接觸與碰撞所產生的脈衝力。

柒、結 論

平行四邊形加法定律的發展可以簡單地分成三段時間: (1)文藝復興時期達文西與史蒂文探討重量與繩子傾斜上提的關係；(2)伽利略的水平與垂直位移的合成；(3)牛頓的受固有力與脈衝力作用後物體作等速移動的位移合成。三代表人物使用相同的規則，但所要合成的物理量卻完全不一樣。

教科書之主要目的是在有限時間內如何讓學生去應用知識，而幾乎無法細說這些知識的來源背景與演進，因此也無法呈現知識的整體面。本文藉著平行四邊形加法定律的實例，扼要地反映出力概念的起源與演變。可看見從史蒂文、伽利略到牛頓，中間經過長期的累積與演進，一直到牛頓才首次正式提出後人不斷使用的「力」一詞，並清晰定義它是造成運動狀態改變的一種作用。牛頓力概念的形成相當不容易，它並非來自靜力平衡的拉力、張力或支撐力。教學者藉此可感受中學與大學物理教科書對物理思維的發展過程，一直存在著無法善盡說明之憾。

參考文獻

Hamilton, W. (1844). *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*, Philosophical Magazine. 25 (3): 489–495.

Dijksterhuis, E. ([1961], 2015）：**世界圖景的機械化** (張卜天譯)。北京：商務印書館。

Hart, I. (1925). *The mechanical investigations of Leonardo da Vinci*, London : Chapman & Hall.

Capecchi, D. (2012). *Historical roots of the rule of composition of forces*, Meccanica, 47, 1887-1901.

Galilei, G. ([1638], 2019）：**關於兩門新科學的對話** (戈革 譯)。台北：大塊文化。

Descartes, R. (1644). *Principle of Philosophy*, Boston:Reidel Pub., 37, Part II.

Truesdell, C. (1968). *Essay in the history of mechanics*, Springer, New York

Brackenridge, J. (1995). *The Key to Newton's Dynamics*, Berkeley: Univ. of Cal. Press.

Newton, I. ([1687], 2019）：**自然哲學之數學原理** (王克迪 譯)。台北：大塊文化。

姚 珩、楊艷玲、吳承宣 (2023)。**牛頓如何想出第二運動定律—由早期運動的原因到外力概念的出現**。科學教育月刊，460，15-23 頁。